

2.4.6 Hookův zákon

$\sigma = K \cdot \varepsilon \Rightarrow$ **Hookův zákon** (konstanta úměrnosti se značí E): $\sigma = E \cdot \varepsilon$.

Výhoda vzorce $\sigma = K \cdot \varepsilon$ - jednoduchost.

Nevýhoda vzorce $\sigma = K \cdot \varepsilon$ - za měsíc nikdo nebude vědět, co znamenají řecká písmena $\Rightarrow$

jiný tvar (po dosazení $\sigma = \frac{F}{S}$ a $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$): $\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l_0}$ (v tabulkách častěji $\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E} \frac{F}{S}$).

Hodnoty modulu pružnosti v tahu (často se rovnají hodnotě modulu pružnosti v tlaku)

látka	ocel	hliník	dural	zlato	bakelit	dřevo smrkové po směru vláken
$E [10^3 \text{ MPa}]$	220	66-68	72	80	9-15	10

Př. 1: Mez úměrnosti ocele je 310 MPa. Urči, o kolik procent se při tomto zatížení ocel natáhne.

$$\sigma = 310 \text{ MPa} = 3,1 \cdot 10^8 \text{ Pa}, E = 220 \cdot 10^3 \text{ MPa} = 2,2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}, \varepsilon = ?$$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{3,1 \cdot 10^8}{2,2 \cdot 10^{11}} = 1,4 \cdot 10^{-3} = 0,14\%$$

Př. 2: Konstanta úměrnosti E má stejně jako normálové napětí jednotku Pa. Jde tedy také o určitou hodnotu normálového napětí. Urči jeho význam.

Když $\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot 1 \Rightarrow \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = 1 \Rightarrow \Delta l = l_0 \Rightarrow$ prodloužení lana je stejné jako jeho

původní velikost. $\Rightarrow$ Youngův model pružnosti udává hodnotu normálového napětí, které by látku prodloužilo na dvojnásobek své délky.

Př. 3: O kolik se prodlouží lano výtahu stojícího v přízemí, pokud má dům čtyři patra a nastoupí do něj čtyři cestující o nejvyšší povolené hmotnosti 250 kg? Potřebné údaje najdi v tabulkách, změř nebo odhadni. O kolik by se za stejných podmínek prodloužilo lano o délce 800 m (výška nejvyšší budovy světa)?

$$m = 250 \text{ kg}, l_0 = 14 \text{ m}, E = 220 \cdot 10^3 \text{ MPa} = 2,2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}, r = 2 \text{ cm} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}, \Delta l = ?$$

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l_0} \quad \Delta l = \frac{mgl_0}{E\pi r^2} = \frac{250 \cdot 10 \cdot 14}{2,2 \cdot 10^{11} \cdot \pi \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2} \text{ m} = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,13 \text{ mm}$$

$$\Delta l = \frac{mgl_0}{E\pi r^2} = \frac{250 \cdot 10 \cdot 800}{2,2 \cdot 10^{11} \cdot \pi \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2} \text{ m} = 7,2 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 7,2 \text{ mm}$$

Př. 4: Gumička o čtvercovém průřezu 2x2 mm se prodlouží po zavěšení 100 g závaží přibližně o čtvrtinu své délky. Urči její modul pružnosti v tahu.

$$m = 100 \text{ g} = 0,1 \text{ kg}, a = 2 \text{ mm} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}, \varepsilon = 0,25, E = ?$$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\frac{F}{S}}{\varepsilon} = \frac{F}{S\varepsilon} = \frac{mg}{a^2\varepsilon}$$

$$E = \frac{mg}{a^2\varepsilon} = \frac{0,1 \cdot 10}{(2 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 0,25} \text{ Pa} = 1 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 1 \text{ MPa}$$

Př. 5: Porovnej vlastnosti požadované po materiálu na nosné lano výtahu s vlastnostmi materiálu pro horolezecké lano. Které materiály na výrobu zmíněných lan používají?

Nosné lano pro výtah: velká pevnost v tahu, velký modul pružnosti v tahu (aby se lano málo prodloužilo při zatížení) $\Rightarrow$ ocel.

Horolezecké lano: velká pevnost v tahu, nízká hmotnost a malý modul pružnosti v tahu (aby se lano snadno prodloužilo a tím se prodloužila doba, po kterou brzdí případný pád a zmenšila se tak rázová síla) $\Rightarrow$ polyamid.

Př. 6: Na wikipedii je možné v článcích o polyamidech najít následující údaje. Urči z nich pevnost polyamidů v MPa a odhadni (pomocí výpočtu) jejich modul pružnosti.

Vlákno	Pevnost v tahu cN/dtex	Hustota g/ccm	tažnost %
PA 6	6	1,13	max. 24
PA 66	6	1,14	max. 31
p-aramid	19	1,45	
ocel	3,5	7,8	

Tex je jednotka užívaná v textilním průmyslu pro jemnost příze. Fyzikálně představuje délkovou hustotu, tedy hmotnost určité délky příze. Jednotku tex, představující gramy na kilometr délky (nebo také miligramy na metr), lze do soustavy SI přepočítat podle vzorce

$$\text{tex} = \frac{\text{g}}{\text{km}} = \frac{\text{mg}}{\text{m}}.$$

Převědeme si pevnost v tahu blíže k jednotkám SI: $6 \frac{\text{cN}}{\text{dtex}} = 6 \frac{0,01 \text{ N}}{0,1 \text{ tex}} = \frac{0,6 \text{ N}}{\text{tex}} \Rightarrow$ na vlákno působí síla 0,6 N $\Rightarrow$ musíme určit jeho průřez.

Hmotnost vlákna: $m = V\rho = Sl\rho \Rightarrow S = \frac{m}{\rho l}.$

Dosadíme do vztahu pro normálové napětí: $\sigma = \frac{F}{S} = \frac{F\rho l}{m}.$

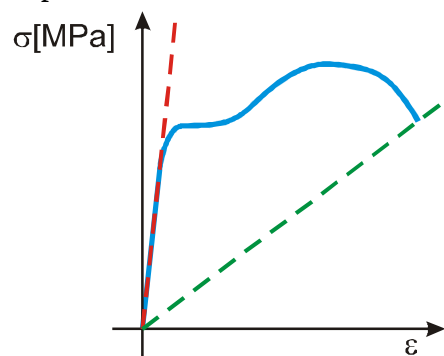
- Pro PA 66 dosadíme: $m = 1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$, $l = 1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$, $\rho = 1140 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $F = 0,6 \text{ N}$

$$\sigma = \frac{F\rho l}{m} = \frac{0,6 \cdot 1140 \cdot 10^3}{10^{-3}} \text{ Pa} = 6,84 \cdot 10^8 \text{ Pa} = 684 \text{ MPa}$$
- Ověříme si vztah pro ocel: $m = 1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$, $l = 1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$, $\rho = 7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $F = 0,35 \text{ N}$

$$\sigma = \frac{F\rho l}{m} = \frac{0,35 \cdot 7800 \cdot 10^3}{10^{-3}} \text{ Pa} = 2,73 \cdot 10^9 \text{ Pa} = 2730 \text{ MPa}$$
- Pro PA 6 dosadíme: $m = 1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$, $l = 1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$, $\rho = 1130 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $F = 0,6 \text{ N}$

$$\sigma = \frac{F\rho l}{m} = \frac{0,6 \cdot 1130 \cdot 10^3}{10^{-3}} \text{ Pa} = 6,78 \cdot 10^8 \text{ Pa} = 678 \text{ MPa}$$

$\sigma = 684 \text{ MPa}$, tažnost 31% $\Rightarrow$ v okamžiku, kdy vlákno praskne je natažené na 31% své původní délky $\Rightarrow$ na protažení na 100% délky by bylo teoreticky potřeba přibližně 3x větší napětí $\Rightarrow 3 \cdot 684 \text{ MPa} \doteq 2000 \text{ MPa}$.



Deformační křivka není přímka. Neznáme přesný tvar deformační křivky pro PA66, ale přibližnou představu si zkusíme udělat z deformační křivky ocele. Spočtená hodnota 2000 MPa odpovídá zelené čárkované čáře (lineární závislost relativního prodloužení od nulového napětí až po mez pevnosti). Ve skutečnosti jsou obě veličiny přímo úměrnou pouze v části závislosti (červená čárkovaná čára) a tato závislost je podstatně strmější $\Rightarrow$ skutečná hodnota modulu pružnosti bude násobně větší (nevíme kolikrát) $\Rightarrow$ pro modul pružnosti v tahu bychom mohli očekávat hodnoty od 4000 MPa do 10000 MPa.